

## DOYGUN OLMAYAN ZEMİNLERİN HİDROMEKANİK SIZDIRMA DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ

### MODELING THE HYDRO-MECHANICAL INFILTRATION BEHAVIOUR OF UNSATURATED SOILS WITH FINITE ELEMENTS METHOD

M.M. Eyüpgiller<sup>1</sup>, M.B.C. Ülker<sup>2</sup>

#### ÖZET

Arazide geoteknik mühendisliğine konu olan doğal zeminler yeraltı su seviyesi üzerinde çoğunlukla kısmen doygun ya da doygun olmayan zeminlerdir (DOZ). DOZ özelliklerinin doygun zeminlere göre mühendislik özellikleri açısından farklılık gösterdiği bilinmesine rağmen, DOZ üzerine yapılan çalışmalar doygun zeminlere göre oldukça geride kalmıştır. Aynı zamanda, pratikte DOZ mekanik özelliklerini doygun durumdaki özellikler gibi kabul eden mühendislik uygulamaları, aşırı korunumlu veya aşırı tasarımlı duruma sebep olabilmektedir. Ayrıca DOZ'da danelerarası boşlukları dolduran boşluk suyuna ek olarak hava bulunması, doygun zeminlere kıyasla daha yüksek içsel sürtünme kuvvetleri sağlarken, DOZ'da boşluk suyu sürekliliğinin de azalmasından kaynaklı daha düşük hidrolik iletkenliğe sebep olur. Zeminin hidrolik iletkenliği ise genel olarak hidromekanik açıdan doygunluk derecesi ve matrik emmeye bağlı olduğundan, DOZ için teorik ve sayısal modellerle açıklamalı çalışılmalıdır. Bu çalışmada DOZ sızdırma davranışı sonlu elemanlar yöntemiyle modellenmiştir. Önce, bir DOZ kolonu modeli oluşturulmuş, kolona ait genişletilmiş üç fazlı poroelastisite denklemleriyle matematiksel formülasyon çıkarılmıştır. Ardından sonlu elemanlar yöntemiyle bu denklem takımları ayrıştırılmış ve literatürde yer alan hidrolik yük altındaki bir boyutlu sızdırma (infiltrasyon) deneyi modellenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Doygun olmayan zeminler, sızdırma davranışı, Biot denklemleri, dinamik analiz, sonlu elemanlar yöntemi

#### ABSTRACT

Natural soils subject to geotechnical engineering in the field are mostly partially saturated or unsaturated soils (DOZ) above the groundwater level. Although it is known that DOZ properties differ in terms of engineering properties compared to saturated soils, studies on DOZ are far

<sup>1</sup> Araş. Gör., İTÜ Afet Yönetimi Enstitüsü, eyupgillerm@itu.edu.tr

<sup>2</sup> Doç. Dr., İTÜ Afet Yönetimi Enstitüsü, mbulker@itu.edu.tr (Sorumlu yazar)

behind with respect to saturated soils. Also, in practice, engineering practices that treat DOZ mechanical properties as saturated properties can result in an overconserved or overdesigned state. Furthermore, the presence of air in addition to the pore water filling the intergranular spaces in DOZ provides higher internal friction forces compared to saturated soils, and causes lower hydraulic conductivity in DOZ due to the decrease in pore water continuity. Since the hydraulic conductivity of the soil generally depends on the degree of saturation and matric suction in terms of hydromechanics, it should be studied with theoretical and numerical models for DOZ. In this study, the DOZ leakage behavior is modeled by the finite element method. First, a DOZ column model was created, and a mathematical formulation was derived with the expanded three-phase poroelasticity equations of the column. Then, these sets of equations were discretized using the finite element method and the one-dimensional infiltration test under hydraulic load, which is available in the literature, was modeled.

**Keywords:** Unsaturated soils, leakage behavior, Biot equations, dynamic analysis, finite elements method

## 1. GİRİŞ

Klasik zemin mekaniği ilk günlerinden beri ağırlıklı olarak doygun zeminlere odaklanmıştır. Ancak yer altı su seviyesi üzerindeki doğal zeminler asıl olarak boşluklarında kısmen hava fazını da içerecek şekilde üç fazlı halde bulunmaktadır. Statik yükler altındaki doygun olmayan zeminlerin (DOZ) hidromekanik davranışı, su içeriğindeki değişimin bir fonksiyonu olarak hacim değişimlerinden önemli ölçüde etkilenir. Ancak bu, 'matrik emme' ( $\psi$ ) olarak adlandırılan boşluk suyu ve boşluk havasının basınçlarındaki farkla doğrudan ilişkilidir. Böyle bir bağımlılık, DOZ davranışını anlamada ve doğru bünye modelleri geliştirmede anahtar kavram haline gelir. Şimdiye kadar DOZ üzerinde yapılan çalışmalar birbiriyle ilişkili üç aşama içermektedir; i) Teorik modelleme, ii) Sayısal modelleme ve iii) Hidromekanik davranışı anlamaya yönelik deneysel çalışma.

Tek bir sıvı fazlı poroz ortamda dalga yayılımının öncü teorisi Biot (1941, 1955, 1956) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra Biot'un poroelastisitesine alternatif olarak difüzyon modellerine dayanan "karışım teorisi" (*mixture theory*) önerilmiştir (Bowen, 1976; Green ve Naghdi, 1969; Truesdell, 1957). Doğrusal olmayan malzeme davranışı, Zienkiewicz ve Shiomi (1984) tarafından teoriye dahil edilmiştir. Ancak, bu teoriler kısmen doymuş durum için değiştirilmelidir (Ulker, 2014). Coussy (1995) karışım teorisi, termodinamik, poro-plastisite ve kemo-mekaniği temel alan çalışmasıyla doygun olmayan durum mekaniğini ileriye taşımıştır. Geliştirilen teorik formülasyonlarda, kısmen doygun zeminler için günümüzde emme olarak adlandırılan negatif boşluk suyu basıncının neden olduğu gözlenen kohezyon (*apperent cohesion*) daha sonra ele alınmaktadır (Zienkiewicz vd., 1990). Ardından, iki akışkan fazı (ör. Boşluk suyu ve hava) için farklı hidrolik iletkenlik fonksiyonları dahil edilecektir. Birçok sayısal yaklaşım arasında bazıları burada öne çıkıyor (Alonso vd., 1987; Bear vd., 1984; Liakopoulos, 1964; Lloret ve Alonso, 1980; Narasimhan ve Witherspoon, 1978; Neuman, 1975; Safai ve Pinder, 1979; van Genuchten, 1980).

Son yıllarda birçok teorik ve sayısal çalışma yapılmıştır. Ghorbani vd. (2015) dinamik yüklere maruz kalan kısmen doygun zeminlerin davranışını simüle etmek için genelleştirilmiş- $\alpha$  yöntemini kullanarak güçlü bir zaman entegrasyon tekniği uygulamaktadır. (Shahbodagh ve Khalili, 2016), kısmen doygun zeminlerin dinamik akış ve deformasyon davranışını tanımlayan karışım teorisine dayalı bir u-p formülasyonu geliştirmiştir. Ravichandran ve Muraleetharan (2009), karışım teorisini kullanarak kısmen doygun zeminlerin dinamiklerini yöneten tam birleştirilmiş denklemleri sunar ve ardından sonlu elemanlar çerçevesinde uygulanan sayısal formülasyonlar geliştirmiştir. Hou vd. (2020), birden fazla sızma olayına maruz kalan doygun olmayan bir zemine sahip tek boyutlu bir kolonda su akışını modellemektedir. Vanapalli ve Oh (2010), temel yapılarının tasarımı için kısmen doygun zeminlerin mekanizmasını inceler. Doymamış zeminler için matris emmeye göre taşıma kapasitesi ve elastisite modülünün değişimini tahmin etmek için yarı deneysel modeller geliştirirler. Uzuoka ve Borja (2012) sonlu şekil değiştirmede (*finite strains*) doygun olmayan poroelastik katıların dinamik tepkisi için temel denklemleri türetmiştir. Basitleştirilmiş formülasyonlarında, bağıl hızların malzeme zaman türevleri ve katı matrise göre boşluk sıvılarının adveksiyon terimleri ihmal edilmektedir ve bu da yer değiştirme ve sıvı basıncı ( $u_s - p_w - p_a$ ) formülasyonuna yol açmaktadır. Zhang vd. (2019), Zhou vd. (2012) tarafından geliştirilen hidro-mekanik bünye modelini benimsemiştir ve hidrolik ve mekanik yükleme nedeniyle zeminin tepkisini yakalamak için zemin-su tutma modelleri dahil edilmiştir.

Bu nedenle, bu çalışmada, katı iskeletin yer değiştirmesi ve iki akışkan fazın basınçları açısından üç fazlı genişletilmiş poroelastisite denklemlerini kullanan çok fazlı bir model geliştirilmiştir. Temel denklemlerdeki doğrusal olmayan davranış kaynakları, katı fazın elasto-plastisitesi, akışkanların su tutma ve hidrolik iletkenlik davranışları ile dahil edilmektedir. Türlü yüklemelerle tetiklenen bu doğrusal olmayan davranış özelliklerini göz önünde bulunduran bu model hem doygun hem de doygun olmayan durumda tek boyutlu zemin kolonu için başarılı sonuçlar sergilemektedir.

## 2. Üç Fazlı Akış ve Deformasyon Denklemleri

Zeminlerin doygun olmayan hidromekanik davranışının araştırılması, katı parçaların yer değiştirmelerinin ve gözenek akışkanlarının (su ve hava) basınçlarının ve bu serbestlik derecelerinin birbirine olan etkilerinin değerlendirilmesini gerektirir. Böyle bir işlem, katı şekil değiştirme nedeniyle gözenek sıvılarının zemin elemanının içine ve dışına hareket etme eğiliminde olduğu, tam bağlaşıklık bir deformasyon ve akış problemi verir. Buna karşılık, boşluk sıvı basınçlarındaki herhangi bir değişiklik, dolayısıyla matrik emme, zemin daneleri etrafında, elemanda şekil değiştirme ile sonuçlanan gerilme gelişimine neden olur. Bu tür bağlaşıklık tepkiyi kapsamı için, fazların kütle dengesi ve momentum dengesi denklemlerinden toplam beş denklem elde edilir. Bunların zamanda integrasyonu için bu çalışmanın devamında “kısmi dinamik DOZ formülasyonu” (*Partially Dynamic Unsaturated soil formulation*) ya da PDU terimleri kullanılmaktadır.

### Kütlenin Korunumu (Kütle Dengesi)

En genel haliyle,

$$\rho V = m \quad (1)$$

ifadesi zamanda kısmi türetilirse:

$$\partial_t(\rho V) = V \partial_t \rho + \rho \partial_t V = V \frac{D\rho}{Dt} + \rho V \dot{\epsilon}_v = V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \dot{u} \right) \quad (2)$$

elde edilir. Burada,  $\frac{D}{Dt} ( )$  malzeme noktası türevi,  $u$ , fazların deplasmanıdır. Tüm fazlar için bu ifadeyi genişletilirse, birim hacim  $V$  için:

$$\frac{D^i \rho^i}{Dt} + \rho^i \text{div} \dot{u}^i = m^i, \quad i = \text{solid}(s), \text{liquid}(l), g(\text{gas}) \quad (3)$$

yazılabilir. Katı ve sıvı arasında kütle alışverişi olmadığını kabul edip ve geçirgen ortamın kütle yaratamayacağını düşünürsek,

$$m^s = 0, m^l + m^g = 0 \quad (4)$$

çıkartırız. Buradan sonrasında, sıvı fazı su, gaz fazı da hava olarak kabul edip ( $w$ ,  $a$ ) indislerini kullanacağız. Bunun yanında, fazların yoğunlukları ( $\rho_i$ ) arasında şu ifade geçerlidir:

$$\rho = \tilde{\rho}^s + \tilde{\rho}^w + \tilde{\rho}^g = (1 - n)\rho^s + n_s \rho^w + n_g \rho^g = (1 - n)\rho^s + nS^w \rho^w + n(1 - S^w)\rho^g \quad (5)$$

Burada,  $\tilde{\rho}$  faz için kısmi yoğunluk,  $n$  porozite,  $S^w$  ise sıvı fazın doygunluk derecesidir.

### Katı Fazın Sürekliliği

Katı fazın kütle dengesi için (3) ile,

$$\frac{D^s \tilde{\rho}^s}{Dt} + \tilde{\rho}^s \text{div} \dot{u}^s = m^s = 0 \quad (6)$$

yazarız ve sonra (5)'te  $\tilde{\rho}^s = (1 - n)\rho^s$  kullanarak,

$$(1 - n) \frac{D^s \rho^s}{Dt} + \rho^s \frac{D^s(1-n)}{Dt} + (1 - n)\rho^s \text{div} \dot{u}^s = 0 \quad (7)$$

elde ederiz.

### Sıvı Fazın Sürekliliği

Sıvı fazın (boşluk suyunun) katı kısma göre göreli kütle dengesi ise (5) ve  $\tilde{\rho}^w = nS^w \rho^w$  ile,

$$\frac{D^s \tilde{\rho}^w}{Dt} + \tilde{\rho}^w \text{div} \dot{u}^w = \tilde{m}^w = 0 \quad (8)$$

ve buradan da,

$$S^w \rho^w \frac{D^s n}{Dt} + n \rho^w \frac{D^s S^w}{Dt} + nS^w \frac{D^s \rho^w}{Dt} + nS^w \rho^w \text{div} \dot{u}^w = 0 \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. (9) denkleminin son terimini boşluk suyunun toplam deplasmanı cinsinden ( $u^w = u^s + w$ ) yazarsak ki burada  $w$  göreli deplasmandır, denklem şu hale gelir:

$$S^w \rho^w \frac{D^s n}{Dt} + n \rho^w \frac{D^s S^w}{Dt} + n S^w \frac{D^s \rho^w}{Dt} + n S^w \rho^w \text{div} \dot{u}^s + n S^w \rho^w \text{div} \dot{w} = 0 \quad (10)$$

Bu denklemde dikkat edilmesi gerekli ifadeler malzeme noktası türevlerini içeren terimlerdir. O yüzden önce şu ilişkileri hatırlamakta fayda var:

$$\frac{D^s \rho^w}{Dt} = \frac{D^s \left( \frac{m^w}{V^w} \right)}{Dt} = - \frac{m^w}{(V^w)^2} \frac{D^s V^w}{Dt} = \frac{\rho^w}{K^w} \frac{D^s p^w}{Dt} \quad (11a)$$

$$\frac{D^s S^w}{Dt} = \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \frac{D^s \psi}{Dt} \quad (11b)$$

$$\psi = p^a - p^w \quad (11c)$$

$p^a$  ve  $p^w$  boşluk hava ve su basınçlarıdır ve (11c) ifadesi matrik emme adını alır. Denklem (7) x  $\frac{\rho^w S^w}{\rho^s}$  + (10) yaparsak,

$$(1 - n) \frac{\rho^w S^w}{\rho^s} \frac{D^s \rho^s}{Dt} + n \rho^w \frac{D^s S^w}{Dt} + n S^w \frac{D^s \rho^w}{Dt} + S^w \rho^w \text{div} \dot{u}^s + n S^w \rho^w \text{div} \dot{w} = 0 \quad (12)$$

buluruz. Bu denklemde (11a, b) birlikte yerine konur ve katının yoğunluğunun değişmediği kabul edilirse:

$$n \rho^w \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \frac{D^s \psi}{Dt} + \frac{n S^w \rho^w}{K^w} \frac{D^s p^w}{Dt} + S^w \rho^w \text{div} \dot{u}^s + n S^w \rho^w \text{div} \dot{w} = 0 \quad (13)$$

elde edilir. (11c) matrik emme ifadesi (13)'te yerine konursa,

$$\left( \frac{n S^w \rho^w}{K^w} - n \rho^w \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \right) \frac{D^s p^w}{Dt} + n \rho^w \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \frac{D^s p^a}{Dt} + S^w \rho^w \text{div} \dot{u}^s + n S^w \rho^w \text{div} \dot{w} = 0 \quad (14)$$

### Gaz Fazın Sürekliliği

Gaz (hava) fazının kütle korunumunu yazarken, aynı sıvı fazında olduğu gibi katıya göre görelî hareketi ya da akışı düşünülerek matematiksel ifade yazılır. (3) denklemi tekrar boşluk havası için yazılırsa şu denklem elde edilir;

$$\frac{D^s \tilde{\rho}^a}{Dt} + \tilde{\rho}^a \text{div} \dot{u}^a = \tilde{m}^a = 0 \quad (15)$$

(5) kullanılarak hava için  $\tilde{\rho}^a = n(1 - S^w) \rho^a$  olduğunu görürüz. Boşluk suyu için yazıldığı gibi, boşluk havası için de görelî deplasman,  $u^a = u^s + v$  şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla (15) denklemi artık şu hali alır:

$$\rho^a (1 - S^w) \frac{D^s n}{Dt} + n \rho^a \frac{D^s (1 - S^w)}{Dt} + n (1 - S^w) \frac{D^s \rho^a}{Dt} + n (1 - S^w) \rho^a \text{div} (\dot{u}^s + \dot{v}) = 0 \quad (16)$$

Denklem (7) x  $\frac{\rho^a (1 - S^w)}{\rho^s}$  + (16) yaparsak,

$$(1 - n) (1 - S^w) \frac{\rho^a D^s \rho^s}{\rho^s Dt} - n \rho^a \frac{D^s S^w}{Dt} + n (1 - S^w) \frac{D^s \rho^a}{Dt} + (1 - n) \rho^a (1 - S^w) \text{div} \dot{u}^s + n (1 - S^w) \rho^a \text{div} \dot{v} = 0 \quad (17)$$

Bu denklemde sıkışamaz katı faz (zemin daneleri) kabulü ve (11b, c) kullanılırsa:

$$-n\rho^a \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \frac{D^S(p^a - p^w)}{Dt} + n(1 - S^w) \frac{D^S \rho^a}{Dt} + (1 - S^w) \rho^a \text{div} \dot{u}^s + n(1 - S^w) \rho^a \text{div} \dot{v} = 0 \quad (18)$$

Burada gaz kanunu yardımıyla, havanın yoğunluğunun basınca bağlı değişimi sabit sıcaklık kabulüyle şu şekilde yazılır;

$$\frac{D^S p^a}{Dt} = \frac{D^S}{Dt} \left( \frac{nRT}{V^a} \right) \simeq RT \frac{D^S \rho^a}{Dt} \rightarrow \frac{D^S \rho^a}{Dt} = \frac{1}{RT} \frac{D^S p^a}{Dt} \quad (19)$$

Bu ifade (18)'de kullanılırsa, son olarak şu denklem elde edilir:

$$\left( \frac{n(1-S^w)}{RT} - n\rho^a \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \right) \frac{D^S p^a}{Dt} + n\rho^a \frac{\partial S^w}{\partial \psi} \frac{D^S \rho^w}{Dt} + (1 - S^w) \rho^a \text{div} \dot{u}^s + nS^a \rho^a \text{div} \dot{v} = 0 \quad (20)$$

### Momentumun Korunumu

Denklemler takımlarında son ilişkiler, sisteme etkiyen kuvvetlerin yarattığı momentumun dengesi denklemleri cinsinden yazılır. “i” fazı için genel olarak şu bağıntı yazılabilir:

$$f^i + \text{div} \sigma^i + \rho^i b^i = \rho^i \ddot{u}^i \quad (21)$$

Burada soldan ilk terim fazlar arası etkileşim kuvveti, ikinci terim toplam gerilmenin divergence’ı, üçüncü terim kütle kuvvetidir. Eşitliğin sağındaki terim ise fazın atalet kuvvetidir. Yapılan kabuller ise; fazlar arası etkileşim kuvvetinin ihmal edilmesi, adveksiyon kuvvetleriyle, göreceli deplasmanların malzeme noktası zaman türevlerinin de yine ihmal edilmesi şeklindedir.

### Sistemin Toplam Dengesi

Dolayısıyla öncelikle sistemde toplam gerilmenin fazlar cinsinden yazılması gereklidir. Bunun için,

$$\sigma' = \sigma + \alpha p \delta_{ij} \quad (22)$$

yazılır ve burada  $\sigma'$  efektif gerilme iken,  $p$  toplam boşluk basıncı,  $\alpha$  Biot parametresi,  $\delta_{ij}$  Kronecker delta vektörüdür. Boşluk basıncını iki fazlı akışkan için şu şekilde yazabiliriz:

$$p = S^w p^w + S^a p^a \quad (23)$$

burada  $S^w$  ve  $S^a$  su ve hava fazların göreceli doygunluk dereceleridir. Dolayısıyla (22) denklemi,

$$\sigma' = \sigma + \delta_{ij} (S^w p^w + S^a p^a) \quad (24)$$

halini alır. Zeminler için genellikle sıkışmaz katı dane kabulüyle  $\alpha$  parametresi 1 kabul edilir. Önceden de belirtildiği üzere Bishop (1959) efektif gerilme ifadesini net gerilme ( $\sigma_{net}$ ) ve matrik emme ( $\psi$ ) olarak iki değişken cinsinden,

$$\sigma' = \underbrace{\sigma - p^a \delta_{ij}}_{\sigma_{net}} + \chi \underbrace{(p^a - p^w) \delta_{ij}}_{\psi} \quad (25)$$

şeklinde vermiştir. Bu denklemlerin (24, 3-25) ikisi de (21)'de kullanılabilir.

Üç fazlı geçirgen ortamın (zeminin) denge ifadelerini yazarken öncelikle sistemin toplam dengesi yazılmalıdır. Bu yüzden, tüm fazlar için (21) toplam halinde ilgili porozitelerle yazılırsa,

$$\text{div} \sigma + \rho b = n^s \rho^s \ddot{u}^s + n^w \rho^w \ddot{u}^w + n^a \rho^a \ddot{u}^a \quad (26)$$

elde edilir. (22) ve (5) denklemleri kullanılırsa (26) vektörel formda şu hali alır:

$$\text{div}(\sigma' - p) + \rho b = \underbrace{\{(1-n)\rho^s + n^w\rho^w + n^a\rho^a\}}_{\rho} \ddot{u}^s + n^w\rho^w\ddot{w} + n^a\rho^a\ddot{v} \quad (27)$$

### Boşluk Suyunun Dengesi

D'Arcy kanununu kullanarak boşluk suyunun akışı sırasında momentumun korunumu yazılırsa:

$$\text{grad}(p^w) - \rho^w b + \frac{n^w\rho^wg}{k^w}\dot{w} + \rho^w(\ddot{u}^s + \ddot{w}) = 0 \quad (28)$$

veya

$$n^w\dot{w} = \frac{k^w}{\rho^wg} [-\text{grad}(p^w) + \rho^w b - \rho^w\ddot{u}^s - \rho^w\ddot{w}] \quad (29)$$

elde edilir. Burada  $k^w$  boşluk suyunun permeabilitesidir.

### Boşluk Havaasının Dengesi

Boşluk suyuna benzer şekilde (28) veya (29) denklemi şu şekilde boşluk havaasının dengesi için yazılır:

$$\text{grad}(p^a) - \rho^a b + \frac{n^a\rho^ag}{k^a}\dot{v} + \rho^a(\ddot{u}^s + \ddot{v}) = 0 \quad (30)$$

veya

$$n^a\dot{v} = \frac{k^a}{\rho^ag} [-\text{grad}(p^a) + \rho^a b - \rho^a\ddot{u}^s - \rho^a\ddot{v}] \quad (31)$$

Burada  $k^a$  boşluk havaasının permeabilitesidir.

## 3. YARI DİNAMİK SONLU ELEMANLAR DENKLEMLERİ

Kısmi Dinamik formülasyon, sistemdeki tüm akışkan görelî ivme terimlerini, yani  $\ddot{v}$  ve  $\ddot{w}$  terimlerini ihmal ederek oluşturulur. Buna göre (29) denklemi (14)'te, (31) de (20)'de yerine konulur ve toplam denge ifadesi de katılırsa, sistem şu hali alır:

$$\left(\frac{nS^w\rho^w}{K^w} - n\rho^w\frac{\partial S^w}{\partial\psi}\right)\frac{D^Sp^w}{Dt} + n\rho^w\frac{\partial S^w}{\partial\psi}\frac{D^Sp^a}{Dt} + S^w\rho^w\text{div}\dot{u} + \text{div}\left\{\frac{k^w}{g}[-\text{grad}(p^w) + \rho^w b - \rho^w\ddot{u}]\right\} = 0 \quad (32a)$$

$$\left(\frac{n(1-S^w)}{RT} - n\rho^a\frac{\partial S^w}{\partial\psi}\right)\frac{D^Sp^a}{Dt} + n\rho^a\frac{\partial S^w}{\partial\psi}\frac{D^Sp^w}{Dt} + (1-S^w)\rho^a\text{div}\dot{u} + \text{div}\left\{\frac{k^a}{g}[-\text{grad}(p^a) + \rho^a b - \rho^a\ddot{u}]\right\} = 0 \quad (32b)$$

$$\text{div}(\sigma' - p) + \rho b = \rho\ddot{u}^s \quad (32c)$$

Burada katı kısım deplasmanı için basitlik olması için  $u^s = u$  alınmıştır. Bu sistemde bilinmeyenler  $u$ ,  $p^w$  ve  $p^a$  dır.

Daha önce sunulan temel denklemlerin doygun olmayan zeminler için uyarlanmış sonlu eleman (FE) formülasyonları bu bölümde sunulmaktadır. FDU (*Fully Dynamic*) formülasyonu bu çalışmanın kapsamı dışında olduğu için QSU (*Quasi-Static*) ve PDU formülasyonlarını kullanıyoruz. Buradaki amaç, kısmen doygun zeminin hidromekanik davranışını teorik ve sayısal olarak anlamak olduğundan, zayıf formların uzaysal ve zamansal alanlarda ayrıklaştırılmasıyla hem yarı statik hem de dinamik çözümler elde edilmiştir. Efektif gerilme tanımı Bishop efektif gerilmesi cinsinden yazılıp boşluk sıvılarının basınçları ayrı ayrı belirtilince:

$$\sigma' = \sigma + \delta_{ij}(S^w p^w + S^a p^a) \quad (33)$$

burada  $\sigma'$  efektif gerilmeyi,  $\sigma$  toplam gerilmeyi,  $\delta_{ij}$  de Kronecker delta'yı ifade eder. Bir sonraki adım olarak 3-33 denklemlerinin zayıf formülasyonları sanal serbestlik dereceleriyle çarpılarak elde edilir.

Ardından formülasyonunun zayıf formu, aşağıda özetlendiği gibi mekansal ayrıklaştırma ile doğrusal olmayan FE denklemleri sayesinde doğrusallaştırılabilir:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} B_u^T (D^{ep})_{n+1}^i B_u d\Omega \right) (\delta U)_{n+1}^{i+1} - \left( \int_{\Omega} B_u^T m \{S^w\}_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta P_w)_{n+1}^{i+1} - \\ & \left( \int_{\Omega} B_u^T m \{S^a\}_{n+1}^i N_a d\Omega \right) (\delta P_a)_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} N_u^T \rho N_u d\Omega \right) (\delta \ddot{U})_{n+1}^{i+1} = \int_{\Gamma} N_u^T (\sigma)_{n+1} d\Gamma + \int_{\Omega} N_u^T (\rho g)_{n+1} d\Omega \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} N_w^T (n_w)_{n+1}^i B_u d\Omega \right) (\delta \ddot{U})_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} B_w^T \left( \frac{k_w}{g} \right)_{n+1}^i N_u d\Omega \right) (\delta \ddot{U})_{n+1}^{i+1} + \\ & \left( \int_{\Omega} B_w^T \left( \frac{\{k_w\}}{\rho_w g} \right)_{n+1}^i B_w d\Omega \right) (\delta P_w)_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( \frac{n_w}{K_w} \right)_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta \dot{P}_w)_{n+1}^{i+1} - \\ & \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( n \frac{\partial S_w}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta \dot{P}_w)_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( n \frac{\partial S_w}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_a d\Omega \right) (\delta \dot{P}_a)_{n+1}^{i+1} + \\ & \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( \frac{n_w}{K_w} \right)_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta \dot{P}_w)_{n+1}^{i+1} - \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( n \frac{\partial S_w}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta \dot{P}_w)_{n+1}^{i+1} + \\ & \left( \int_{\Omega} N_w^T \left( n \frac{\partial S_w}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_a d\Omega \right) (\delta \dot{P}_a)_{n+1}^{i+1} = \left( \int_{\Gamma} N_w^T \left( \frac{\{k_w\}}{\rho_w g} \nabla p_w \right)_{n+1}^i d\Gamma \right) + \int_{\Omega} B_w^T \left( \frac{k_w}{g} \right) (g_i) d\Omega \end{aligned} \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} N_a^T (n_a)_{n+1}^i B_u d\Omega \right) (\delta \ddot{U})_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} B_a^T \left( \frac{k_a}{g} \right)_{n+1}^i N_u d\Omega \right) (\delta \ddot{U})_{n+1}^{i+1} + \\ & \left( \int_{\Omega} B_a^T \left( \frac{\{k_a\}}{\rho_a g} \right)_{n+1}^i B_a d\Omega \right) (\delta P_a)_{n+1}^{i+1} + \left( \int_{\Omega} N_a^T \left( \frac{n_a}{K_a} \right)_{n+1}^i N_a d\Omega \right) (\delta \dot{P}_a)_{n+1}^{i+1} + \\ & \left( \int_{\Omega} N_a^T \left( n \frac{\partial S_a}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_a d\Omega \right) (\delta \dot{P}_a)_{n+1}^{i+1} - \left( \int_{\Omega} N_a^T \left( n \frac{\partial S_a}{\partial \psi} \right)_{n+1}^i N_w d\Omega \right) (\delta \dot{P}_w)_{n+1}^{i+1} = \\ & \left( \int_{\Gamma} N_a^T \left( \frac{\{k_a\}}{\rho_a g} \nabla p_a \right)_{n+1}^i d\Gamma \right) + \int_{\Omega} B_a^T \left( \frac{k_a}{g} \right) (g_i) d\Omega \end{aligned} \quad (34c)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $N_i$  ( $i=u, a, w$ ) şekil fonksiyonu,  $B$  kuvvet-yer değiştirme matrisidir. Ayrıca doğrusallaştırma, bünyesel formülasyonun yukarıdaki forma dahil edilmesi açısından anahtardır:

$$\sigma_{n+1}^{i+1} = \sigma_{n+1}^i + \delta \sigma_{n+1}^{i+1} = \sigma_{n+1}^i + \{D^{ep}\}_{n+1}^{i+1} B \delta u_{n+1}^{i+1} \quad (35)$$

Denklem (36a)'da  $(\tilde{K}_T) = \int_{\Omega} B_u^T \{D^{ep}\} B_u d\Omega$  tanjant rijitlik matrisi,  $D^{ep}$  doygun olmayan zemin modelinin mekanik bileşeninin elastoplastik matrisidir. Denklem (17) ve (50) kullanılarak:

$$d\sigma' = \tilde{D}_m^{ep} d\varepsilon + (\tilde{D}_h^{ep} + \chi) d\psi I d\sigma' = \tilde{D}_m^{ep} d\varepsilon + (\tilde{D}_h^{ep} + \chi) d\psi I \quad (36)$$

burada  $D^{ep} = \tilde{D}_m^{ep}$  eşitliği açıktır. Denklem (34) matris biçiminde şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ M_{wu} & 0 & 0 \\ M_{au} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n+1}^i \begin{Bmatrix} \delta \ddot{U} \\ \delta \ddot{P}_w \\ \delta \ddot{P}_a \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{wu} & C_{ww} & C_{wa} \\ C_{au} & C_{aw} & C_{aa} \end{bmatrix}_{n+1}^i \begin{Bmatrix} \delta \dot{U} \\ \delta \dot{P}_w \\ \delta \dot{P}_a \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1} + \\
& \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{ua} \\ 0 & K_{ww} & 0 \\ 0 & 0 & K_{aa} \end{bmatrix}_{n+1}^i \begin{Bmatrix} \delta U \\ \delta P_w \\ \delta P_a \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1} = \begin{Bmatrix} (R_u)_{ext} \\ (R_{p_w})_{ext} \\ (R_{p_a})_{ext} \end{Bmatrix}_{n+1}^i + \begin{Bmatrix} (R_u)_b \\ (R_{p_w})_b \\ (R_{p_a})_b \end{Bmatrix}_{n+1}^i \quad (37)
\end{aligned}$$

şuna indirgenir:

$$\tilde{M}_{n+1}^i \delta \ddot{X}_{n+1}^{i+1} + \tilde{C}_{n+1}^i \delta \dot{X}_{n+1}^{i+1} + \tilde{K}_{n+1}^i \delta X_{n+1}^{i+1} = (R_{ext})_{n+1} + (R_b)_{n+1}^i \quad (38)$$

Burada  $X=[U \ P_w \ P_a]^T$  serbestlik derecesi vektörü,  $R_{ext}$  dış kuvvetler ve  $R_b$  gövde kuvvetleri vektörünü ifade eder. Yukarıdaki formülasyonun zamansal entegrasyonu, *kapalı Newmark* yöntemiyle (38)'i kullanarak ve Newmark ayrıklaştırmasının klasik adımlarıyla elde edilir. Yakınsama kriterleri ise, belirli bir tolerans için artık (rezidüel) kuvvetler veya iteratif yer değiştirmeler kullanılarak tanımlanır.

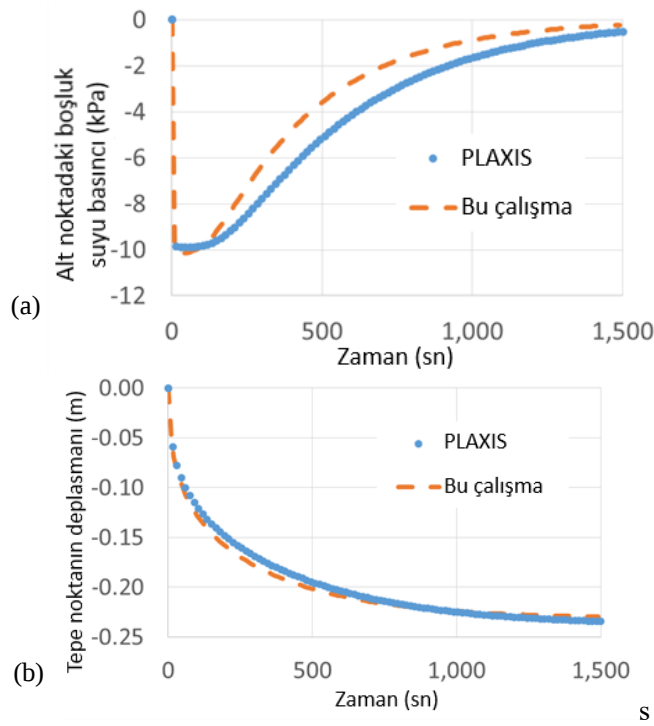
## 4. ANALİZ SONUÇLARI

### 4.1. Doygun Zemin Kolonu Üzerinde Toplam Gerilme Yüklemesi

Birinci problemde, 10 m'lik doymuş bir zemin kolonunun 10kPa yüzey yükü altındaki tepkisi değerlendirilmiştir. Mevcut formülasyonun sıfır emme değerindeki doymuş zeminin tepkisini de yakalayabileceği bu analiz ile gösterilmiştir. Doğrulama için problem PLAXIS programında da (Brinkgreve ve ark. 2016) Tablo 1'de verilen değerlerle çalıştırılmıştır. PLAXIS modelinde MCC modeli kullanılmıştır. Şekil 1, üstte yer değiştirme değişimini ve altta boşluk basıncı değişimini göstermektedir.

Tablo 1. Sayısal analizlerde kullanılan parametre değerleri

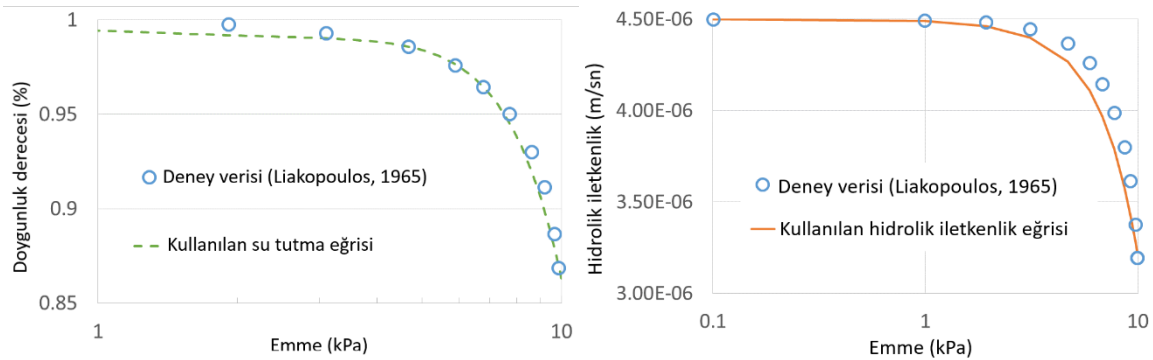
|             | M    | v                     | $\lambda(0)$ | $\kappa$    | E<br>(MPa) | $\gamma$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | $\gamma_w$<br>(kN/m <sup>3</sup> ) | $k_z(0)$<br>(m/s) |
|-------------|------|-----------------------|--------------|-------------|------------|----------------------------------|------------------------------------|-------------------|
| Şekil 8     | 1    | 0.2                   | 0.1          | 0.05        | -          | 19                               | 10                                 | 1e-5              |
| Şekil 10    | -    | 0.42                  | -            | -           | 20         | -                                | 10                                 | 1e-8              |
| Şekil11-12  | 1.2  | 0.33                  | 0.13         | 0.02        | -          | 17                               | 10                                 | 1e-5              |
|             | r    | $\beta$               | k            | VG $\alpha$ | VGm        | VGn                              | $S_r^{res}$                        |                   |
| Şekil 11-12 | 0.92 | $12.5 \times 10^{-3}$ | 0.6          | 0.005       | 0.5        | 2                                | 0                                  |                   |



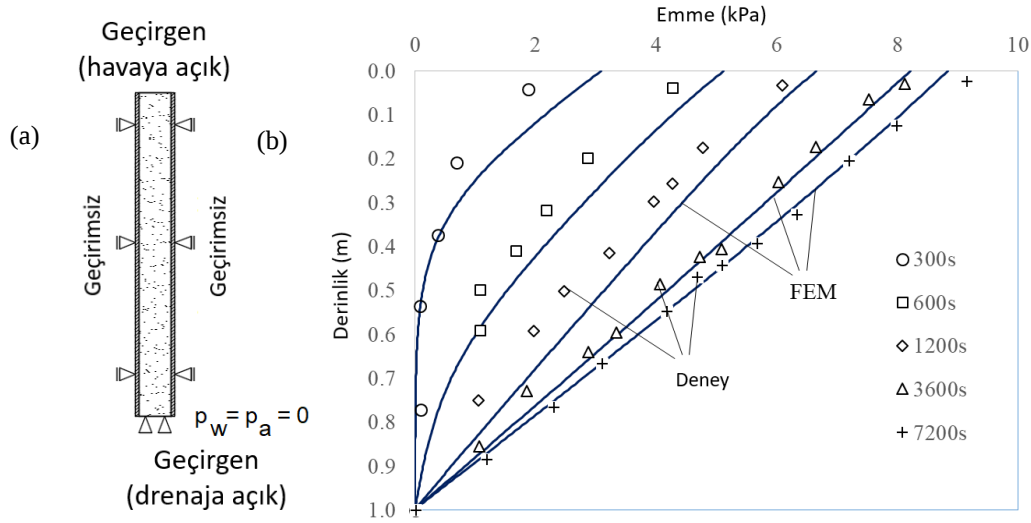
Şekil 1. Mekanik yükleme ve doymuş zemin kolonunun a) Boşluk suyu basınçları ve b) Deplasmanları

#### 4.2. Sızdırma Deneyi Simülasyonu

Doymuş olmayan zeminler üzerinde yürütülen az sayıda ve iyi bilinen deneysel çalışmalardan biri, Liakopoulos (1964) tarafından gerçekleştirilen sızdırma testidir. Burada, tamamen doymuş bir kum kolonunun boşluk suyu, Şekil 2'de gösterildiği gibi, çeşitli konum ve zamanlarda tansiyometreler aracılığıyla emmelerin kaydedildiği alt kısımdan boşaltılır. Bu analiz için katı iskeletin lineer elastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi göz önünde bulundurulur, çünkü sebep olunan hidrolik akış nedeniyle üretilen mekanik plastik şekil değiştirmeler yoktur. Bu analizde kullanılan Su Tutma Eğrisi ve Hidrolik İletkenlik Fonksiyonu, burada yaklaşık olarak verilmiştir, Şekil 9'da verilmiştir. Şekil 3, bu çalışmada modellendiği ve çeşitli zamanlarda test verileriyle doğrulandığı şekliyle emme değişimi göstermektedir (Liakopoulos, 1964).



Şekil 2. Su sızdırma simülasyonlarında kullanılan a) su tutma eğrisi ve b) hidrolik iletkenlik fonksiyonu (Liakopoulos, 1964)



Şekil 3. Liakopoulos (1964) tarafından yapılan sızdırma deneyi ve simülasyon sonuçları

## 5. KAPANIŞ

Bu çalışmada doymun olmayan zeminlerin hidromekanik davranışı lineer olmayan üç ayrı kaynağı hesaba katarak modellenmiştir. Bu üç kaynak, doymun olmayan zeminler için karakteristik olan i) Su tutma davranışı, ii) Hidrolik iletkenlik davranışı, iii) Elastoplastik davranıştır. Modellemede genişletilmiş Biot formülasyonunun kullanılmış, problemlere uygun olarak kısmi dinamik ve yarı-statik analizler yapılmıştır. Modelin kapasitesi, doymun durum için piyasada yaygın kullanılan bir bilgisayar programı ile kıyaslanarak, doymun olmayan durum için de literatürde birçok araştırmacı tarafından çalışılan bir deneyi simüle ederek incelenmiş, sonuçlar başarılı bulunmuştur. Son olarak, elde edilen modelin kapasitesini ispat etmesi, ileride çeşitli yüklemeler altındaki doymun olmayan zeminlerin hidromekanik açıdan analiz edilmesinde kullanılabileceğini göstermektedir. Bu sonlu elemanlar formülasyonu, farklı bünye denklemlerini de içerdiğinde çok daha geniş kapsamlı bir araç haline alacaktır.

## KAYNAKLAR

- Alonso, E. E. ., Gens, A. ., ve Hight, D. W. (1987). Special problem soils. General Report. *Proc. 9th European Conf. SMFE*, 1098–1146.
- Bear, J., Yavuz Corapcioglu, M., ve Balakrishna, J. (1984). Modeling of centrifugal filtration in unsaturated deformable porous media. *Advances in Water Resources*, 7(4), 150–167. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(84\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0309-1708(84)90013-7)
- Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2), 155–164.
- Biot, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, 26(2), 182–185.
- Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2), 179–191.

- Bowen, R. M. (1976). Theory of mixtures. In *Continuum physics*. Academic Press.
- Coussy, O. (1995). *Mechanics of porous continua*. Wiley.
- Ghorbani, J., Nazem, M., ve Carter, J. P. (2015). Numerical Study of Dynamic Soil Compaction at Different Degrees of Saturation. In *The Twenty-fifth International Ocean and Polar Engineering Conference* (p. ISOPE-I-15-806).
- Green, A. E., ve Naghdi, P. M. (1969). On basic equations for mixtures. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 22(4), 427–438.
- Hou, X., Vanapalli, S. K., ve Li, T. (2020). Water flow in unsaturated soils subjected to multiple infiltration events. *Canadian Geotechnical Journal*, 57(3), 366–376. <https://doi.org/10.1139/cgj-2018-0566>
- Liakopoulos, A. C. (1964). *Transient flow through unsaturated porous media*. University of California, Berkeley.
- Lloret, A. ., ve Alonso, E. . E. (1980). Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour. *Géotechnique*, 30(4), 449–477. <https://doi.org/10.1680/geot.1980.30.4.449>
- Narasimhan, T. N. ., ve Witherspoon, P. A. (1978). Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media: 3. Applications. *Water Resources Research*, 14(6), 1017–1034.
- Neuman, S. P. (1975). Galerkin approach to saturated–unsaturated flow in porous media. In R. H. . Gallagher, J. T. . Oden, C. . Taylor, ve O. C. Zienkiewicz (Eds.), *Finite elements in fluids* (pp. 201–217). Wiley.
- Ravichandran, N., ve Muraleetharan, K. K. (2009). Dynamics of unsaturated soils using various finite element formulations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(5), 611–631. <https://doi.org/10.1002/nag.737>
- Safai, N. M., ve Pinder, G. F. (1979). Vertical and horizontal land deformation in a desaturating porous medium. *Advances in Water Resources*, 2(C), 19–25. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(79\)90003-4](https://doi.org/10.1016/0309-1708(79)90003-4)
- Shahbodagh, B., ve Khalili, N. (2016). A u-p Formulation for Fully Coupled Dynamic Analysis of Flow and Deformation in Unsaturated Soils. *Applied Mechanics and Materials*, 846, 378–384. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.846.378>
- Truesdell, C. (1957). Sulle basi della termomeccanica. *Rend. Lincei*, 22(8), 33–38.
- Ulker, M. B. (2014). Dynamics of unsaturated soils: Governing equations and constitutive relations. *Proceedings of the 11th International Congress On Advances In Civil Engineering*.
- Uzuoka, R., ve Borja, R. I. (2012). Dynamics of unsaturated poroelastic solids at finite strain. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 36(13), 1535–1573. <https://doi.org/10.1002/nag.1061>
- van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892–898. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
- Vanapalli, S., ve Oh, W. (2010). A model for predicting the modulus of elasticity of unsaturated soils using the soil-water characteristic curve. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 4(4), 425–433. <https://doi.org/10.3328/IJGE.2010.04.04.425-433>
- Zhang, Y., Zhou, A., Nazem, M., ve Carter, J. (2019). Finite element implementation of a fully

- coupled hydro-mechanical model and unsaturated soil analysis under hydraulic and mechanical loads. *Computers and Geotechnics*, 110(January), 222–241. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2019.02.005>
- Zhou, A. N., Sheng, D., Sloan, S. W., ve Gens, A. (2012). Interpretation of unsaturated soil behaviour in the stress – Saturation space, I: Volume change and water retention behaviour. *Computers and Geotechnics*, 43, 178–187. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2012.04.010>
- Zienkiewicz, O. C. ., ve Shiomi, T. (1984). Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8(1), 71–96. <https://doi.org/10.1002/nag.1610080106>
- Zienkiewicz, O. C. ., Xie, Y. M. ., Schrefler, B. A. ., Ledesma, A. ., ve Bićanić, N. (1990). Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. II. Semi-saturated problems. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 429(1877), 311–321.

